Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τμήμα Μαθηματικών

Μάθημα: **Πραγματική Ανάλυση**

Εξεταστική Ιανουαρίου 2019

Ημερομηνία Εξέτασης: 28/1/2019

Θέμα 1

A) Δίνεται η συνάρτηση

$$\rho_u : \mathcal{F}(A,\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(A,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

με τύπο $\rho_u(f,g) = min\{1, sup_{x\in A}|f(x) - g(x)|\}$.

ι) Να δείξετε ότι η ρ_u αποτελεί μετρική στον χώρο $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$.

ιι) Να δείξετε ότι η σύγκλιση ως προς τη μετρική ρ_u ισοδυναμεί με την ομοιόμορφη σύγκλιση.

ιιι) Να εξετάσετε αν η ρ_u παράγει στάθμη στον χώρο αυτό.

B) Εάν ρ_u είναι η παραπάνω μετρική, να δείξετε ότι $(\mathcal{F}(A,\mathbb{R}), \rho_u)$ είναι πλήρης μ.χ.

Θέμα 2

A) Έστω A ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και (f_n) μια ισοσυνεχής ακολουθία στον $\mathcal{C}(A,\mathbb{R})$. Να δείξετε ότι αν (f_n) συγκλίνει κατά σημείο προς μια $f \in \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$, τότε αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα προς την f.

B) Έστω $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}, x \in [0,1], n \in \mathbb{N},$.

i) Να εξετάσετε την (f_n) ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση.

ii) Να εξετάσετε αν η $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, είναι ισοσυνεχής οικογένεια.

Θέμα 3

A) Να εξετάσετε ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων:

i) $f_n(x) = \frac{1}{1+nsin^2\pi x}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

ii) $f_n(x) = (|x-n|^3 + (x-n)^3), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

B) Θεωρούμε $f, g : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$, φραγμένες συναρτήσεις και τέτοιες ώστε για κάθε $y \in A'$ ισχύει

$liminf_{x\to y} f(x) \geq f(y)$ και $liminf_{x\to y} g(x) \geq g(y)$.

Εάν η $f + g$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A \cap A'$, να δείξετε ότι και η f και η g είναι συνεχείς στο x_0.

Θέμα 4

A) Έστω $\mathcal{K} = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : |f(x) - f(y)| \leq |x-y|(1-|f(x)|), x, y \in [0,1]\}$. Να εξετάσετε εάν το $\mathcal{K}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, όπου $\|f\| = sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$.

B)α)Έστω $[a,b] \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{H}(A,\mathbb{R})$ γραμμικός υπόχωρος του $(\mathcal{B}(A,\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, όπου $\|f\| = sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ και $T : \mathcal{H}(A,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, γραμμικό συναρτησοειδές, $A = [a, b]$.

Να δείξετε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

ι) T είναι συνεχής.

ιι)T φραγμένο, δηλαδή υπάρχει $M \geq 0$ τέτοιο ώστε $|Tf| \leq M\|f\|, \forall f \in \mathcal{H}(A,\mathbb{R})$.

β)Έστω $[0,b] \subseteq \mathbb{R}$ και $\mathcal{H}([0,b],\mathbb{R})$ ο χώρος των φραγμένων συναρτήσεων που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann. Εάν $T : \mathcal{H}([0,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, όπου $Tf(x) = \int_0^x f(s)e^{(x+s)}dx$, να δείξετε ότι T είναι γραμμικό και φραγμένο συναρτησοειδές.